Дәріс 6. Сызықты жүйелерді орнықтылыққа зерттеу. Орнықтылық критерийлері. Раусс, Гурвиц критерийлері.

PhD, Калиева Н.Б.

Өтпелі үдеріс біткеннен кейін, жүйе қалыптасқан тепе-теңдікке келетін болса, ондай жүйе **орнықты жүйе** деп аталады. Ондай жүйеде $y(t)$ уақыт өткен сайын өзінің тұрақты бір мәніне ұмтылады. Егер сыртқы әсер тоқтағаннан кейін жүйе қалыптасқан күйден алыстаса, ондай жүйені **орнықсыз** деп атайды.

Егер реттелетін шаманың, $y(t)$, өсетін, өспейтіні белгілі болса, онда жүйенің орнықтылық есебі шешіледі. Сонымен жүйенің:

1) орнықты;

2) орнықсыз;

3) нейтралды сияқты 3-күйі болады.

Жүйенің орнықтылығын анықтау үшін, оның ДТ-ін шығару керек:

$$\mathrm{a}_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dy^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dx^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x. \quad (1)$$

Жүйеге түсірілген сыртқы әсер тоқтағанда, теңдеудің оң жағы 0-ге айналады, одан кейін жүйенің орнықтылығы біртекті ДТ-мен анықталады.

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0. \qquad (2)$$

Осы біртекті ДТ-дің шешімі $y(t)$ уақыт бойынша өсу, кемуін көрсетеді.

Жүйенің жалпы шешемі:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{pt}. \qquad (3)$$

$y(t)$ функциясы өтпелі үдерісті анықтайды. Сонда өтпелі үдеріс (3) теңдеуімен толығымен сипатталады.

Ол теңдеудің түбірлері нақты, жорамал немесе комплексті болуы мүмкін.

$$p_i = \alpha_i + i\beta_i.$$

1) Егер түбірлер, нақты, теріс таңбалы болса, онда $e^{pt} \rightarrow 0$ ұмтылады. Яғни $y(t) \rightarrow 0$. Бұл жағдайда, өтпелі процесс біткеннен кейін, жүйе қалыптасқан тепе-теңдік күйге қайтып келеді.

2) Егер p_i түбірлер нақты және оң таңбалы болса, $e^{pt} \rightarrow \infty$ ұмтылады. Сол себепті $y(t) \rightarrow \infty$. Яғни процесс орнықсыз, ал жүйе тепе-теңдік күйінен алыстап кетеді.

3) Егер түбірлер комплекс сан болса, $e^{pt} \rightarrow 0$, түбірдің нақты бөлігі «-» болса, онда $y(t) \rightarrow 0$, жүйе орнықты. Егер p_i түбірлері комплексті түйіндес, оның ішінде нақты бөлігі «+» болса, онда $e^{pt} \rightarrow \infty, y(t) \rightarrow \infty$ орнықсыз.

4) Егер p_i түбірлер жорамал болса, онда $y(t)$ гармоникалық тербеліс жасайды (Жорамал түбірлер орнықтылық шекарасын көрсетіп тұрады).

$$\text{B}(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m,$$

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n.$$

$$W(p) = \frac{\text{B}(p)}{D(p)},$$

$$D(p) - \text{сипаттаушы полином.}$$

Олай болса, $D(p) = 0$ тұйықталмаған жүйенің сипаттаушы теңдеуі.

Тұйықталған жүйенің беріліс функциясы:

$$\overline{W}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)},$$

$$\overline{W} = \frac{\text{B}(p)}{D(p) + \text{B}(p)}.$$

Онда $D(p) + \text{B(p)} = 0$ тұйықталған жүйенің сипаттаушы теңдеуі. Сипаттаушы теңдеуді $\frac{1}{D(p)}$ көбейту арқылы тұйық емес жүйенің беріліс функциясы арқылы сипатталған сипаттаушы теңдеуді алуға болады:

$$W(p) + 1 = 0.$$

Орнықтылық критерийлері

Раусс критерийі $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$, $a_0 > 0$.

	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	$c_{14} = a_6$
	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23}=a_5$	$c_{24} = a_7$
$\lambda_3 = \frac{c_{11}}{c_{21}}$	$c_{31} = c_{12} - c_{22}\lambda_3$	$c_{32} = c_{13} - c_{23}\lambda_3$	$c_{33} = c_{14} - c_{24}\lambda_3$	$c_{34}=\ldots$
$\lambda_4 = \frac{c_{21}}{c_{31}}$	$c_{41} = c_{22} - c_{32}\lambda_4$	$c_{41} = c_{23} - c_{33}\lambda_4$	$c_{43}=\ldots$	$c_{44}=\ldots$
$\lambda_5 = \frac{c_{31}}{c_{41}}$	$c_{51} = c_{32} - c_{42}\lambda_4$	$c_{52}=\ldots$	$c_{53}=\ldots$	$c_{54}=\ldots$
$\lambda_6 = \frac{c_{41}}{c_{51}}$	т.с.с.	...	...	...

$$\lambda_i = \frac{C_{i-2,1}}{C_{i-1,1}},\ C_{i,k} = C_{i-2,k+1} - C_{i-1,k+1}\lambda_i,$$

1) Егер Раусс кестесінің бірінші бағанының барлық элементтері оң болса, онда жүйе орнықты.

2) Егер кем дегенде бір элемент теріс болса, жүйе орнықсыз болады.

3) Егер бірінші бағанның кем дегенде біреуі нөлге тең болса, онда жүйе орнықтылық шекарасында.

Гурвиц критерийі

$$D(p) = 0,$$

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Гурвиц анықтауышы құрылады ($a_0 > 0$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{vmatrix}$$

Жүйе орнықты болуы үшін Гурвиц анықтауышы мен оның барлық диагональдық минорлары оң болуы қажетті және жеткілікті. Диагональдық минорлар:

$$\Delta_1 = |a_1| > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \ldots$$

2-ретті сипаттаушы теңдеу: $a_0p^2+a_1p+a_2 = 0.$

Оған 2-ретті Гурвиц анықтауышы сәйкес келеді:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0 \cdot 0 = a_1a_2, \quad \Delta_2 = a_1a_2.$$

Орнықтылық шарты: $a_0, a_1, a_2 > 0;$ $\Delta_2 > 0$, яғни $a_1a_2 > 0.$

3-ретті сипаттаушы теңдеу:

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0.$$

Оған 3-ретті Гурвиц анықтауышы сәйкес келеді:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2a_3 - a_10) - a_3(a_0a_3 - 0\cdot0)+0(a_0a_1 - a_2\cdot0).$$

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_0a^2_3.$$

Орнықтылық шарты: $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0;$ $\Delta_3 > 0$ немесе $a_1a_2 - a_0a_3 > 0.$

4-ретті сипаттаушы теңдеу:

$$a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0.$$

Оған 4-ретті Гурвиц анықтауышы сәйкес келеді:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} a_0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} + 0 - 0.$$

$$\Delta_4 = a_1a_2a_3a_4 - a^2{}_1a^2{}_4 - a_0a^2{}_3a_4$$

Орнықтылық шарты: a_0, a_1, a_2, a_3, $a_4 > 0$, $\Delta_4 > 0$, немесе $a_1a_2a_3 - a^2{}_1a_4 - a_0a^2{}_3 > 0$

5-ретті сипаттаушы теңдеу:

$$a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5 = 0.$$

Орнықтылық шарты:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5 > 0,$$

$$(a_1a_2 - a_0a_3)(a_3a_4 - a_2a_5) - (a_1a_4 - a_0a_5)^2 > 0.$$

Гурвиц анықтауыштарын дәрежесі 5-тен де жоғары сипаттаушы теңдеулерге құруға болады. Алайда сипаттаушы теңдеудің дәрежесі өскен сайын, есептеу көлемі де көбейе түседі. Сол себепті Гурвиц критерийін дәрежесі 5-тен жоғары сипаттаушы теңдеулерге қолданбаған жақсы.

Гурвиц анықтауышы орнықтылық шекарасындағы күшейту коэффициентін анықтауға мүмкіндік береді.

Орнықтылық шекарасының шарты $\Delta = 0$ болып табылады. Осы шарттан күшейту коэффициенті табылады. Сипаттаушы теңдеудің бос мүшесі күшейту коэффициенті болады.

Ұсынылатын әдебиеттер:

1. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.
2. Қыдырбекұлы А.Б. Автоматика негіздері : оқу құралы / Қыдырбекұлы А.Б., Ибраев Ғ.Е.. — Алматы: Казахский национальный университет им. аль-Фараби, 2014. — 114 с.
3. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. Теория систем автоматического управления. – С.-Пб.: Профессия, 2004. – 752 с.
4. Лукас В.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – Екатеринбург: Из-во УГГГА, 2002. – 675 с.
5. Kluever C. A. Dynamic systems: modeling, simulation, and control. – John Wiley & Sons, 2020.